Εξέταση Σεπτεμβρίου 2020 - Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Μία είναι η σωστή απάντηση και αυτή πρέπει να επιλέξετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Ο χρόνος που τέθηκε στην κάθε ερώτηση για τις δύο ομάδες θεμάτων (A) και (B) που δημιουργήθηκαν είναι 5 λεπτά με 1 λεπτό διάλειμμα μεταξύ δυό διαδοχικών ερωτήσεων.

Ερώτηση 1. (Κοινή) Έστω $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοιες, ώστε $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ και $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$.

(i) $\lim_{z\to\infty} (g \circ f)(z) = \infty$.

(ii) $\lim_{z\to\infty} (g \circ f)(z) = 0$.

(iii) $\lim_{z\to\infty} (f \circ g)(z) = \infty$.

(iv) $\lim_{z\to\infty} (f \circ g)(z) = 0$.

(v) Κανένα από τα παραπάνω.

(vi) Δεν απαντώ.

Ερώτηση 2. (Δύο ομάδες)

(A) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$. Τότε:

(i) Δεν υπάρχει συνεχής επέκταση $\hat{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ της f.

(ii) Δεν υπάρχει ακέραια επέκταση $\hat{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ της f τέτοια, ώστε $\lim_{z\to\infty} \hat{f}(z) = \infty$.

(B) Έστω $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x,\ x > 0$. Τότε:

(i) Δεν υπάρχει συνεχής επέκταση $\hat{f} : \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\} \to \mathbb{C}$ της f.

(ii) Δεν υπάρχει ολόμορφη επέκταση $\hat{f} : \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\} \to \mathbb{C}$ της f τέτοια, ώστε $\lim_{z\to 0} \hat{f}(z) = \infty$.

Όπου $\Re(z)$ το πραγματικό μέρος το μιγαδικού αριθμού z.

Επιλογές για κάθε ομάδα:

(a) Δεν απαντώ.

(b) Το (i) σωστό, το (ii) λάθος.

(c) Το (i) σωστό, το (ii) σωστό.

(d) Το (i) λάθος, το (ii) σωστό.

(e) Το (i) λάθος, το (ii) λάθος.

Ερώτηση 3. (Δύο ομάδες)

(A) Έστω μια ακολουθία $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ και δύο ισχυρισμοί:

(i) Αν $\lim_{n} \sqrt[n]{2|z_n|} < 1$, τότε η $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει απόλυτα.

(ii) Αν $\lim_n \sqrt[n]{2|z_n|} > 2$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ αποκλίνει.

(B) Έστω μια ακολουθία $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ και δύο ισχυρισμοί:

(i) Αν $\limsup_n \frac{|z_{n+1}|}{2|z_n|} < 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} 2z_n$ συγκλίνει απόλυτα.

(ii) Αν $\liminf_n \frac{|z_{n+1}|}{2|z_n|} > 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} z_n$ αποκλίνει.

Επιλογές για κάθε ομάδα:

(a) Δεν απαντώ.

(b) Το (i) σωστό, το (ii) λάθος.

(c) Το (i) σωστό, το (ii) σωστό.

(d) Το (i) λάθος, το (ii) σωστό.

(e) Το (i) λάθος, το (ii) λάθος.

Ερώτηση 4. (Δύο ομάδες) Σωστό ή λάθος;

(A) Έστω $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνεχής και στο δίσκο $D(2i, 1)$ ολόμορφη και έστω K η πολυγωνική γραμμή που διέρχεται από τα σημεία $(0,2),(0,0),(1,0),(0,2)$ κατά αυτή τη σειρά. Τότε $\int_K f(z)dz = 0$.

(B) Έστω $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνεχής και στο δίσκο $D(i, 2)$ ολόμορφη και έστω K η πολυγωνική γραμμή που διέρχεται από τα σημεία $(1,0),(0,0),(0,1),(1,0)$ κατά αυτή τη σειρά. Τότε $\int_K f(z)dz = 0$.

Ερώτηση 5. (Δύο ομάδες) Σωστό ή λάθος;

(A) Για $z, w \in \mathbb{C}$ με $|z+i| < 2$ και $|w+i| = 3$ ισχύει $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{w+i}\right)^n = \frac{w+i}{w-z}$.

(B) Για $z, w \in \mathbb{C}$ με $|z+2i| > 2$ και $|w+2i| = 3$, ισχύει $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w+2i}{z+2i}\right)^n = \frac{z+2i}{z-w}$.

Ερώτηση 6. (Δύο ομάδες) Σωστό ή λάθος;
Έστω $\alpha \in \mathbb{C}$ και $r > 0$ σταθερά. Τότε, η συνάρτηση:

(A) $f(s) := \int_0^{2\pi s} (\alpha + re^{it})dt - 2\pi\alpha,\ s \in \mathbb{R}$ είναι $2\pi-$περιοδική.

(B) $f(s) := \int_0^{2\pi} (s\alpha + re^{it})dt,\ s \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή.

Ερώτηση 7.(Δύο ομάδες)

(A) Έστω δυο ισχυρισμοί:

   (i) Το σύνολο $D(0,1) \cap \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \Im(z) \leq \sqrt{|\Re(z)|}\}$ είναι αστερόμορφο.
   (ii) Το σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \geq \Im(z)\}$ είναι αστερόμορφο.

(B) Έστω δυο ισχυρισμοί:

   (i) Το σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \geq \Im(z)\}$ είναι αστερόμορφο.
   (ii) Το σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : \Re^2(z) \geq \Im(z)\}$ είναι αστερόμορφο.

   Όπου $\Re(z)$ και $\Im(z)$ το πραγματικό και το φανταστικό μέρος το μιγαδικού αριθμού z, αντίστοιχα.

Επιλογές για κάθε ομάδα:

(a) Δεν απαντώ.

(b) Το (i) σωστό, το (ii) λάθος.

(c) Το (i) σωστό, το (ii) σωστό.

(d) Το (i) λάθος, το (ii) σωστό.

(e) Το (i) λάθος, το (ii) λάθος.

Ερώτηση 8. (Δύο ομάδες) Σωστό ή λάθος;

(A) Έστω $S = \partial D(2i,1)$ μια απλή κλειστή καμπύλη. Τότε, $\displaystyle\int_S (z-2)^2 \log(z-2)dz = 0$.

(B) Έστω $S = \partial D(0,3)$ μια απλή κλειστή καμπύλη. Τότε, $\displaystyle\int_S (z+1)\log(z+1)dz = 0$.

Ερώτηση 9. (Κοινή) Έστω $S = \partial D(0,1)$ μια απλή κλειστή θετικά προσανατολισμένη καμπύλη. Τότε,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{\partial D(0,1)} \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}} = 2\pi i,\ z \in D(0,1).$$

Ερώτηση 10. (Κοινή) Έστω $f\colon D(2+2i,4) \to \mathbb{C}$ με $f(1+i) = 1$ και $f^{(n)}(1+i) = \frac{1}{n!}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Τότε, η f επεκτείνεται ολόμορφα σε κάθε $D(2+2i, 2(k+2)),\ k \in \mathbb{N}$.

Ερώτηση 11. (Κοινή) Έστω f ακέραια, $z_0 \in \mathbb{C}$ και $S(z_0,r), r > 0$ απλή κλειστή καμπύλη θετικά προσανατολισμένη. Τότε,

$$\lim_{r\to\infty} \left| \int_{S(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \right| = +\infty.$$

Ερώτηση 12. (Κοινή) Έστω όπου ορίζετε η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z-4\pi i}$. Επιλέξτε το σωστό:

(i) Η f δεν έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο $4\pi i$.

(ii) Η f έχει πόλο τάξης 2 στο $4\pi i$.

(iii) Η f έχει ουσιώδη ανωμαλία στο $4\pi i$.

(iv) Η f έχει πόλο τάξης 1 στο $4\pi i$.

(v) Η f έχει επουσιώδη ανωμαλία στο $4\pi i$.

(vi) Δεν ισχύει κανένα από τα παραπάνω.

(vii) Δεν απαντώ.

Ερώτηση 13. (Κοινή)

Για τη συνάρτηση του κύριου ορίσματος, ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες (επιλέξτε ένα):

(i) Είναι συνεχής στο 0.

(ii) Απειρίζεται, όταν το z τείνει προς το 0.

(iii) Δεν έχει όριο στο 0, αλλά είναι φραγμένη σε μια περιοχή του.

(iv) Δεν ισχύει κανένα από τα παραπάνω.

(v) Δεν απαντώ.

Ερώτηση 14. (Κοινή) Σωστό ή λάθος;

Δεδομένου ότι $\lim\limits_{z\to 0} z^z = 1$, συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{z\to 0}(nz)^{nz} = n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Ερώτηση 15. (Κοινή) Σωστό ή λάθος;

Η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{z}{1+|z|}$, $z \in \mathbb{C}$ απεικονίζει το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο εξωτερικό του, και αντίστροφα.